第６講　電磁誘導・荷電粒子の運動（電磁気学）

1 （解答用紙２）

図１に示すように，環状の鉄心に巻き数 n_1 のコイル１と巻き数 n_2 のコイル２が巻かれている。これらのコイルの電気抵抗は無視できるほど小さく，コイル１は抵抗 R_1 と任意の電圧 E を発生できる電源に接続され，一方コイル２は抵抗 R_2 とスイッチＳに接続されている。これらのコイルに電流を流したとき，磁束は鉄心内にのみ発生し，鉄心外への漏れは無視できるものとする。そのとき鉄心内の磁束 Φ と，コイル１の電流 I_1 およびコイル２の電流 I_2 との間には，以下の式(ア)が成り立つものとする。

$$\Phi = k(n_1 I_1 + n_2 I_2) \qquad \text{式(ア)}$$

ここで，磁束 Φ と電流 I_1 および I_2 の向きは図中の矢印の向きを正とし，係数 k は鉄心の形状や透磁率によって決まる定数とする。

また，微小時間 Δt の間にこの鉄心内の磁束が $\Delta\Phi$ だけ増加したとき，Δt と $\Delta\Phi$ およびコイル１の電圧 V_1 との間には以下の式(イ)が成り立つ。

$$V_1 = n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad \text{式(イ)}$$

ここで，電源の電圧 E，コイル１の電圧 V_1，コイル２の電圧 V_2 は，それぞれａ点，ｂ点，ｃ点を基準としたときの aa′間，bb′間，cc′間の電位差と定義する。

時刻 $t=0$ では，いずれのコイルにも電流は流れていないものとして，以下の問Ⅰ，Ⅱに答えよ。

Ⅰ　スイッチＳが開いている状態のとき，コイル１の電圧 V_1 が図２に示す電圧波形（V_1 は $0<t<T$ のとき一定値 V_0 をとり，その他の時刻では０をとる）となるように，電源の電圧 E を変化させた。

(1)　時刻 t が $0<t<T$ のとき，コイル１の電流 I_1 は正負どちらの向きに増加するか。また，その理由を簡潔に述べよ。

(2)　時刻 $t=T$ における鉄心内の磁束 Φ を求めよ。

(3)　式(ア)を用いて，時刻 $t=T$ におけるコイル１の電流 I_1 を求めよ。

(4)　以下のそれぞれの場合について電源の電圧 E を求めよ。

(a)　時刻 t が $0<t<T$ の場合

(b)　時刻 t が $T<t$ の場合

Ⅱ　次にスイッチＳが閉じられている場合を考える。問Ⅰと同様に，コイル１の電圧 V_1 が図２に示す電圧波形となるように，電源の電圧 E を変化させた。

(1)　時刻 $t=T$ における鉄心内の磁束 Φ を求めよ。

(2)　時刻 t が $0<t<T$ のとき，両コイルの両端に発生する電圧の大きさの比，$|V_1|/|V_2|$ を求めよ。またｃ点とｃ′点とでは，どちらの電位が高くなるかを答えよ。

(3)　時刻 t が $0<t<T$ のとき，コイル１の電流 I_1 を求めよ。

＜ Note ＞

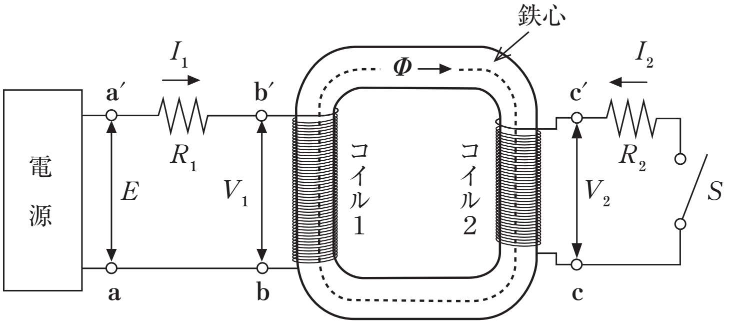


図１

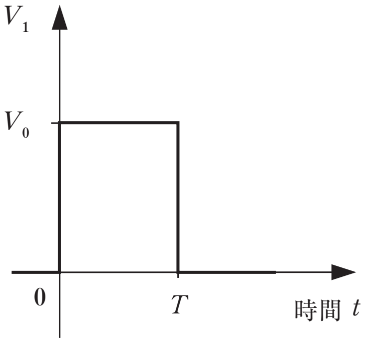


図２

< Note >

2 （解答用紙２）

磁界および電界の影響を受け，xy 平面上を運動する電荷を持った粒子(荷電粒子)を考える。図１のように，領域 $y>0$ と領域 $y<-l$ では磁束密度 B の一様な磁界が xy 平面に垂直に(紙面裏から表の向きに)かかっており，$-l<y<0$ の領域では一様な電界 E が $+y$ 方向にかかっている。xy 平面内で原点から $+y$ 方向に速さ v ($v>0$)で荷電粒子が打ち出される。荷電粒子の質量を m，電荷を q ($q>0$)とし，重力の影響は無視して良い。以下では MKSA 単位系を用いる。

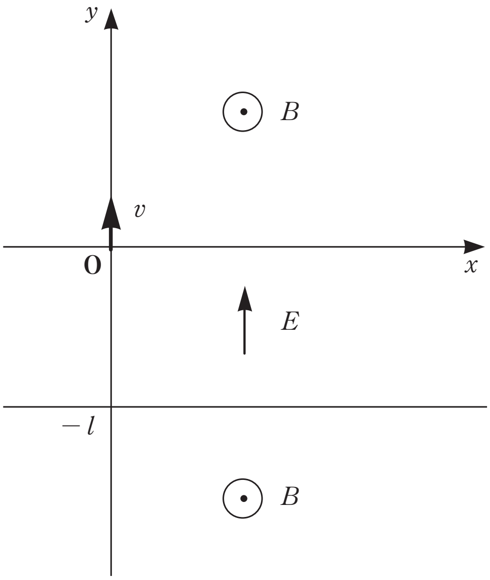


図１

Ⅰ　荷電粒子が最初に x 軸を通過するまでの時間を求めよ。

Ⅱ　荷電粒子が最初に x 軸を通過する点と原点との距離を求めよ。

Ⅲ　荷電粒子の運動は初速度の大きさ v によって２種類の軌道をとる。この２種類の軌道の概形を示せ。

Ⅳ　Ⅲにおける２種類の軌道を分ける初速度の大きさ v_0 を求めよ。

Ⅴ　Ⅲの２種類の軌道それぞれについて，荷電粒子が最初に x 軸を通過してから２度目に x 軸を通過するまでの時間を求めよ。

Ⅵ　Ⅲの２種類の軌道それぞれについて，x 方向の平均速度を求めよ。

< Note >

第６講　確認テスト

1　（解答用紙２）

図１(a)のように，導体でできた中空の円筒を鉛直に立て，その中に円柱形の磁石をＮ極が常に上になるようにしてそっと落したら，やがてある一定の速さで落下した。これは，磁石が円筒中を通過するとき，電磁誘導によりその周りの導体に電流が流れるためである。磁石の落下速度がどのように決まるかを理解するために，導体の円筒を，図１(b)のように，等間隔で積み上げられたたくさんの閉じた導体リングで置き換えて考えてみる。以下の問に答えよ。

Ⅰ　まず，図２のように，１つのリングだけが水平に固定されておかれており，そのリングの中心を磁石が一定の速さ v で下向きに通り抜ける場合を考える。z 座標を，リングの中心を原点として，鉛直上向きが正になるようにとる。磁石は z 軸に沿って，z 軸の負の向きに運動することに注意せよ。

(1)　磁石がリングに近づくときと遠ざかるとき，それぞれにおいて，リングに流れる電流の向きと，その誘導電流が磁石に及ぼす力の向きを答えよ。電流の向きは上向きに進む右ねじが回転する向きを正とし，正負によって表せ。

(2)　磁石の中心の座標が z にあるとき，$z=0$ に置かれたリングを貫く磁束 $\Phi(z)$ を，図３のように台形関数で近似する。すなわち磁束は，区間 $-b \leqq z \leqq -a$ で０から最大値 Φ_0 に一定の割合で増加し，区間 $a \leqq z \leqq b$ で最大値 Φ_0 から再び０に一定の割合で減少するとする。ここで磁束の正の向きを上向きにとった。磁石が通過する前後に，このリングに一時的に誘導起電力が現れる。その大きさを Φ_0，v，a，b を用いて表せ。

(3)　リング一周の抵抗を R としたとき，誘導起電力によって流れる電流の時間変化 $I(t)$ のグラフを描け。リングに電流が流れ始める時刻を時間 t の原点にとり，電流の正負と大きさ，電流が変化する時刻も明記せよ。ただし，リングの自己インダクタンスは無視してよい。

Ⅱ　次に，図１(b)のように，鉛直方向に問Ⅰで考えたリングを密に積み上げ，その中を問Ⅰと同じ磁石が落下する場合を考える。鉛直方向の単位長さあたりのリングの数を n とする。

(1)　リングに電流が流れるとジュール熱が発生する。磁石が速さ v で落下するとき，積み上げられたリング全体から単位時間当たりに発生するジュール熱を求めよ。

(2)　磁石の質量を M，重力加速度を g としたとき，エネルギーの保存則を用いると磁石が一定の速さで落下することがわかる。その速さ v を求めよ。ただし，このとき空気の抵抗は無視できるものとする。

Ⅲ　図１(a)で，磁石のＮ極とＳ極を逆にして実験を行うと，磁石はどのような運動を行うか。その理由も示せ。

＜ Note ＞

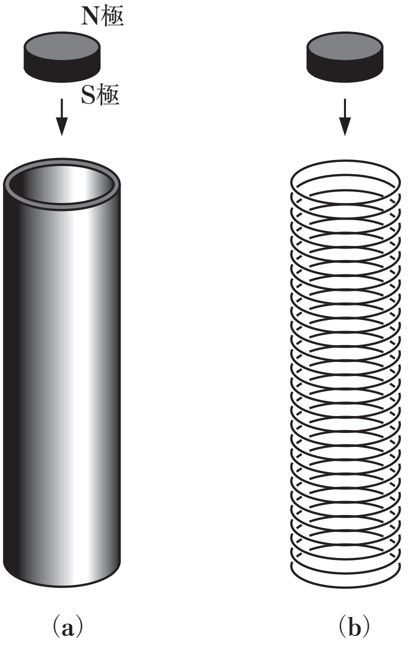


図１

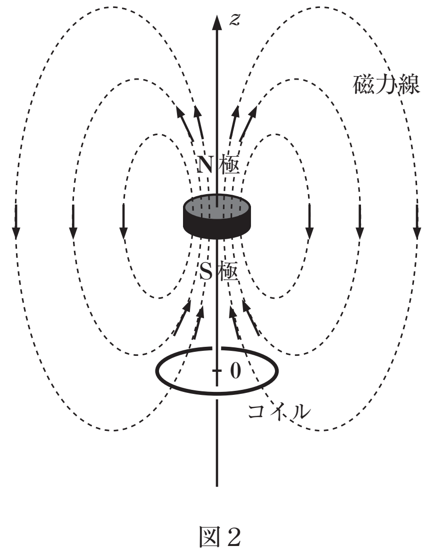


図２

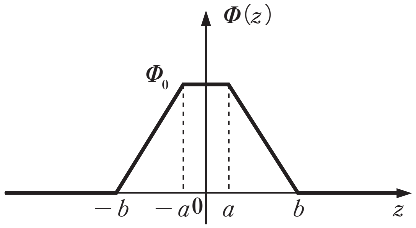


図３

＜ Note ＞

第６講　解答

1

Ⅰ　(1)　正の向き(理由は略)

(2)　$\dfrac{V_0}{n_1}T$

(3)　$\dfrac{V_0}{kn_1^{\,2}}T$

(4)　(a)　$\dfrac{R_1V_0}{kn_1^{\,2}}t+V_0$　　(b)　$\dfrac{R_1V_0}{kn_1^{\,2}}t$

Ⅱ　(1)　$\dfrac{V_0}{n_1}T$

(2)　$\dfrac{n_1}{n_2}$，c′点

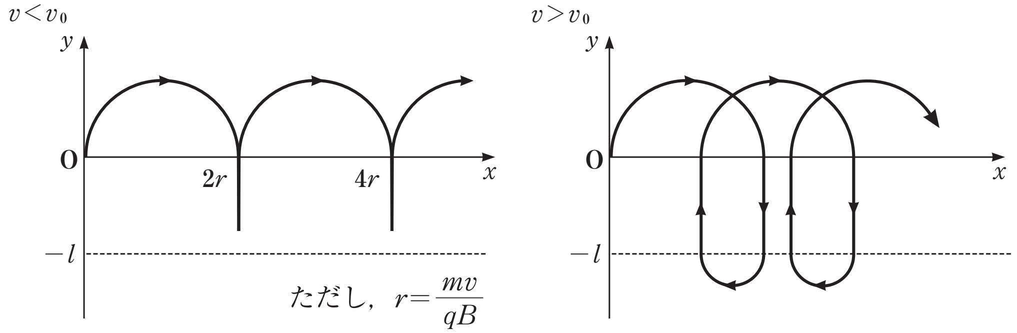
(3)　$\dfrac{V_0}{kn_1^{\,2}}t+\dfrac{n_2^{\,2}V_0}{n_1^{\,2}R_2}$

2

Ⅰ　$\dfrac{\pi m}{qB}$

Ⅱ　$\dfrac{2mv}{qB}$

Ⅲ



Ⅳ　$\sqrt{\dfrac{2qEl}{m}}$

Ⅴ　$v<v_0$ の場合：$\dfrac{2mv}{qE}$　　$v>v_0$ の場合：$\dfrac{\pi m}{qB}+\dfrac{2mv}{qE}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2qEl}{mv^2}}\right)$

Ⅵ　$v<v_0$ の場合：$\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{B}{E}v}v$

$v>v_0$ の場合：$\dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{2qEl}{mv^2}}}{\pi+\dfrac{B}{E}v\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2qEl}{mv^2}}\right)}v$

第６講　確認テスト

【解答】

Ⅰ　(1)　近づくとき：電流…負の向き，力…z 軸の正の向き

遠ざかるとき：電流…正の向き，力…z 軸の正の向き

(2)　$\dfrac{\Phi_0 v}{b-a}$

(3)　下図

Ⅱ　(1)　$\dfrac{2n\Phi_0^2 v^2}{R(b-a)}$　　(2)　$\dfrac{MgR(b-a)}{2n\Phi_0^2}$

Ⅲ　元の実験と同じ運動をする。(理由は解説参照)

【解説】

Ⅰ

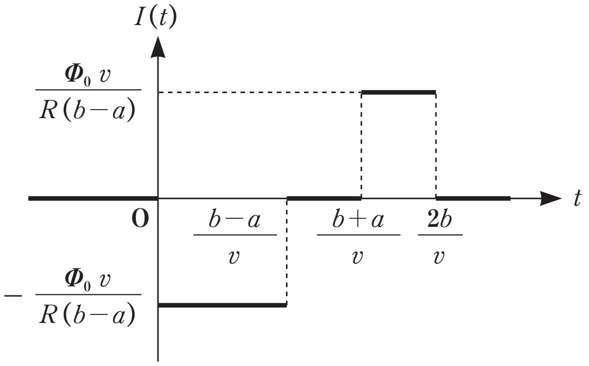
(1)　近づくとき，電流は負の向き　力は z 軸の正の向き

遠ざかるとき，電流は正の向き　力は z 軸の正の向き

(2)　ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$|V|=\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\frac{\Phi_0 v}{b-a}$$

(3)　右図(電流の大きさは，$I_0=\dfrac{\Phi_0 v}{R(b-a)}$)



Ⅱ

(1)　$RI_0^2\times 2(b-a)n=\dfrac{2n\Phi_0^2 v^2}{R(b-a)}$

(2)　磁石の速さが一定のとき，運動エネルギーの変化はないので，位置エネルギーが減った分だけジュール熱が発生。

$$Mgv=\frac{2n\Phi_0^2 v^2}{R(b-a)}\qquad \therefore\quad v=\frac{MgR(b-a)}{2n\Phi_0^2}$$

Ⅲ　磁石のＮ極とＳ極を入れかえると，コイルに流れる電流の向きは変わるが，コイルにかかる力の向きは変化しない。よって元の実験と同じ運動をする。